Fleischer Tamás

VITA

Fraktál szerkezetű-e az úthálózat?

Bevezetés

A Közlekedéstudományi Szemle 2001/5. számában nagyszerűen dokumentált és igen inspiráló cikket olvashattunk a hazai közúthálózat szerkezetének fraktálgeometriai vizsgálatáról (Koren 2001).

Az "Úthálózatok és fraktálok" című cikk röviden bemutatja a fraktálok legfontosabb tulajdonságát, az önhasonlóságot, valamint a tört dimenzió értelmezhetőségét, mint a térkitöltés mértékét mérő mennyiséget. Részletesen foglalkozik továbbá a tört dimenzió meghatározására kifejlesztett ún. dobozszámláló eljárással, amikor is egy vizsgált idomot egyre csökkenő oldalhosszúságú négyzetlapokkal fedünk le és az a kérdés, hogy ennek során hogyan változik a lefedéshez szükséges elemek száma. A szerző ezt az eljárást alkalmazza a hazai úthálózat vizsgálatára is.

A nagyon szellemes eljárás valóban alkalmasnak tűnik arra, hogy egy hálózat szerkezetéről újfajta, korábban nem értelmezett információkat szolgáltasson, mi magunk is ezt próbáljuk a következőkben kihasználni, az idézett cikk nyomdokain haladva. Ugyanakkor érdemes ezt az eljárást a fraktál-értelmezéstől függetlenül is szemügyre venni, elgondolkodni azon, hogy vajon mi magának a mérési eljárásnak a lényege.

Ha a végtelen sík egészét "fednénk be" négyzetekkel, vagy – ahogy arra az eredeti cikk is hivatkozik – egy ebből a síkból kivágott, és éppen a lefedő idomok méretével harmonizáló téglalapon kísérleteznénk, (a cikkben ilyen a teljes térképlap) akkor fele akkora oldalhosszúságú négyzetekből mindig éppen négyszer annyira lenne szükségünk, azaz a lefedéshez szükséges cellák számát N-nel, a cella oldalmérete arányváltozását r-rel jelölve pontosan

$$N = r^{-2}$$

értéket kapnánk, vagyis azt, hogy a sík maga éppen (D = 2) kétdimenziós.

Ezzel szemben, ha egy körlapot akarunk négyzetekkel lefedni, akkor mást fogunk tapasztalni. Minél finomabb beosztással, azaz apróbb négyzetekkel dolgozunk, annál jobban képesek vagyunk megközelíteni a kör pontos területét, azaz annál kevesebb körlapon kívüli területet kell fölöslegesen lefednünk. Ennek megfelelően feleakkora négyzetekből már nem négyszerannyi, hanem annál kevesebb négyzetre lesz az eljárás során szükségünk. Amit csinálunk, tulajdonképpen nem más, mint a területszámítás határérték-képzés eljárásával történő elvégzésének a szemléltetése. A *'d'* átmérőjű korong területét először d^2 vagy annál nagyobb négyszögnek mérjük, majd ahogy csökken a lefedő idomok mérete, egyre jobban közelítünk a $p/4\ d^2$ értékhez.

Vajon ebben az esetben is állandó értéket ad-e a lefedő cellák N száma és a cellák r oldalmérete logaritmusai közötti (log N / log r) arány ? Könnyű belátni, hogy nem. Előzőekben D = 2 értéket akkor kaptunk, amikor a megfelezett cellák közül minden egység továbbra is benne maradt a folyamatban. A kör lefedése esetében viszont eleinte jelentős tempóban potyog le a körön kívüli területből, (azaz a dimenzió kettőnél kisebbnek mutatkozik) de akkor, amikor már több nagyságrendnyi különbség van a kör mérete és a cellaméret között, a kör területéhez képest területben egyre jelentéktelenebb a lefedés "cikkcakkossága" és a kihulló cellák aránya, vagyis a dimenzió hozzásimul a kettes értékhez. Éppen azért alkalmas ez az eljárás "normális" síkidomok esetén a területmérésre, mert hamar következtetni lehet az idom kétdimenziós területének értékére. *Itt tehát az eljárást nem a dimenziószám meghatározására használjuk, hanem addig ismételjük, amíg elég közel nem jutunk az általunk eleve feltételezetten kétdimenziós idom lefedéséhez.* Az eljárás *közben* a korongot nem tekintjük "tört" vagy éppen "változó" dimenziójú idomnak, hanem mérőeszközünket tartjuk még túl durvának a területméréshez, ezért tovább folytatjuk az eljárást, amíg a "dimenziószám" fokozatosan jobban megközelíti a $D = 2$ értéket.

Fraktálok esetében más a helyzet: eljárásunk közben nem csak a méréshez használt cella mérete aprózódik, de az egyre kisebb mérettartományokban a mérni kívánt alakzatnak is új finomságú (határ)vonala bontakozik ki: nem tudjuk előre megmondani, hogy a kialakuló idomnak milyen lesz a lefedhetősége. A neves, "szabályos" fraktálok tökéletesen önhasonlók, azaz úgy viselkednek, mintha a tized-, vagy századakkora cellák is ugyanolyan viszonyban maradnának a mérendő idommal, mint a legelső négyzetek. Ebben az esetben a dimenziószám nem valamely egész számhoz közelít, hanem egy tört értékben rögzül.

A valóságban nem zárható eleve ki, hogy a szabályos fraktál (tökéletes önhasonlóság, a dimenzió fix tört értéket mutat) illetve a geometriai síkidom (elméleti határvonala egyáltalán nem változik a mérettartományokkal, azaz skála-invariáns, a dimenziószám 2-höz közelít) között is létezhetnek különféle formák. Ilyen esetben tehát a "dimenzió" nem közelítene egész számhoz sem és tört számhoz sem, viszont dimenziómérő eljárásunk közben "a végtelenségig" változást mutatna. Ha létezik ilyen alakzat, azt jobb híján nevezhetjük *fraktálszerűen* viselkedő alakzatnak, utalva arra, hogy a mérési eljárás közben a léptékváltással folytonosan meglepetések érnek bennünket. Ebben a széles értelemben nyilvánvaló, hogy az úthálózat egésze is "fraktál-szerű": hiszen más elemeket és más tulajdonságokat kell figyelembe vennünk, amikor településen belüli, vagy kistérségi szinten foglalkozunk vele, és másokat, amikor nemzetközi korridorokat tervezünk. Ebből azonban természetesen egyáltalán nem következik automatikusan, hogy az úthálózat a mandelbroti értelemben vett fraktál, azaz fix tört dimenzióval megadható alakzat lenne. Nézzük meg, erre vonatkozóan mit vizsgált meg az idézett tanulmány?

Egy előzetes rostálás

Képzeljük először el, hogy bemelegítésképpen a dobozolási módszerrel nem az úthálózatot, hanem egy hagyományos konyhai szitát akarunk megvizsgálni, aminek 40 cm-es átmérőjű köralakú (fahäncs) palástja van, és magát a textilt 1x1mm-es közöket alkotó drótok feszítik ki. Kezdjük a lefedést mondjuk 50 x 50 cm-es négyzetekkel, és felezgessük fokozatosan a cellaméretet. A hatodik felezés után jutunk 1 x 1 cm-nél kisebb cellákhoz, és csak a kilencedik felezéssel 1 x 1 mm alá.

Egészen eddig az eljárásunk nem a szitát, hanem tulajdonképpen a 40 cm-es árméröjű körlapot vizsgáztatta, hiszen csak a körlapon kívül szabadulhattak fel cellák. Tulajdonképpen eddig kiraktuk a korong felületét négyzetmilliméterekkel, mintha a területét mérnénk. A "dimenzió" az első kilenc lépésben alulról közelített a kettes értékhez.

Az 1x1 mm-nél kisebb cellák esetén van először esélyünk arra, hogy a szitán is átessenek egyes négyzetek: innentől fogva valóban a hálót vizsgáljuk és nem a teli körlapot. Eddig azonban, az első kilenc lépésben semmiféle kapcsolatunk nem volt ezzel a hálózattal, amennyiben eljárásunkra semmiféle hatással nem volt a hálózat, következésképp az eljárás nem is minősíthette a hálózatot. Ettől kezdve azonban, néhány lépésben igen sok cellát elvesztünk: a "dimenzió" jóval kettő alá zuhan.

Az persze jogos kérdés, hogy ezután vajon mit mér a tovább folytatódó eljárás. A *valódi szita* esetében határértékben azt a *felületet*, amit a drótok elfednek a teljes lyukból. Azaz, most már nem a körlapnak, hanem a dróthálónak a tényleges területét kezdi mérni a folyamat. (Elvileg, amikor már mikron méretű cellákkal dolgoznánk, a dimenzió visszanőne kettő közelébe és megállapíthatnánk a "drótok árnyékának a területét".) Ha viszont nem a valódi szitát képzeljük magunk elé, hanem anyagtalan, "egydimenziós" szálakból álló hálót, akkor a további eljárásban egyre több cella fog kihullani és az eredmény az "egydimenziós" értéket fogja egyre jobban megközelíteni. (Elérni csak akkor lehetne, ha minden cella kihullana, ez soha nem következik be.)

Az úthálózat fraktálvizsgálata

Koren Csaba eljárásában természetesen nem egy szitát vizsgált, hanem először az országos főúthálózatot. Azonban itt is érvényes marad az, hogy a nagyobb mérettartományban (100 km és 25 km élméret között) az eljárás *szinte* teljesen független a hálózattól: *lényegében* annak a síkidomnak a területét közelíti, amit az országos közúthálózat körülzár. A "szinte" és a "lényegében" kitételek azért alkalmazandók, mert valami mégis eltér a szita esetétől: az úthálózat esetében a körülzárt területen túl a határhoz vezető utak miatt a síkidom nem csak görbevonalú, de "rojtos" is. (ld az *eredeti cikk 2. ábráját*).

A teljes (fő- és mellék) úthálózat esetében (*eredeti cikk 4. ábra*) a körülzárt terület igen jól megfelel az ország teljes területének, és éppen a nagy cellák tartományában a rojtosság nyilván alig érzékelhető. A hálózat sűrűbb volta miatt a területlefedés itt tovább tart, egészen a néhány km-es rácsméretig: a cellák csak ekkor kezdenek tömegesen az országon belül is kiesni, azaz csak ettől kezdve kezdődik ténylegesen a *hálózat* letapogatása.

E sorok írójának nincs különösebb kétsége afelől, hogy a dimenzióértékben a cikkben tapasztalt töréspontot az általa itt jelzett jelenség okozza, azaz előtte *nem a hálózatot, hanem a közrezárt területet vizsgálja az eljárás*. Ugyanakkor be kell vallani, hogy a főhálózat illetve a teljes hálózat esetében az eredeti eljárás során kapott dimenzió-értékek egymáshoz képest nagy eltérése éppen a nagy cellák tartományában kétségtelenül ellentmondani látszik az itt leírt értelmezésnek: ugyanis érthetetlen, hogy a 100, 50, 25 km-es oldalhosszúságú cellák tartományában, ami lényegében az ország-határt tapogatja körül, miért mutatkozna jelentős differencia attól függően, hogy milyen sűrű a belső hálózat.

Ha azonban a cikkben közölt értékek alapján közös ábrán tüntetjük fel a főúthálózat és a teljes úthálózat esetében kapott értékeket, az eredmény mégis megerősíti azon vélelmünket, hogy induláskor (nagy cellaméreteknél) a két hálózatfajta esetében kapott tapasztalati értékek igen közel esnek egymáshoz. Ha nem regressziós egyenessel közelítjük a tapasztalati értékeket, ezzel összemosva az egyes lépések során kapott információt, hanem az egyes cellaugrások esetén tapasztalt differenciákat külön vizsgáljuk, akkor megállapítható, hogy a nagy cellák aprózódásával *eleinte* a dimenzió (*a cikkbeli 3. és 5. ábrán* ezt a regressziós egyenes meredeksége állandó értéknek érzékelteti) valójában nem távolodik a $D = 2$ értéktől, hanem *közelíti* azt, majd, – összhangban azzal, hogy egyes belső cellák is kezdenek kiesni, és már nem a teljes országterület van lefedve, – a log-log görbe meredeksége valóban *távolodni* kezd ettől az értéktől.

Referencia-értéknek tekinthetjük, hogy teljes cellaszám (teljes lefedés, D = 2 azaz két dimenziós minta) esetén minden felezés során a létrejövő cellaszám logaritmusának a növekedése rendre 0.600. A megfelelő tapasztalati értékek a *teljes úthálózat* esetében a következők (az értékek az *eredeti cikk 2. táblázata* alapján számítva):

cella oldal-méret [m]	**a cellaszám logaritmusának növekménye**
100000	
	0.469
50000	
	0.517
25000	
	0.554
12500	
	0.571
6250	
	0.540
3125	
	0.430
1563	

Eszerint az egymást követő első négy felezés során a log-log skálán a meredekséget jellemző értéknövekmény egyre jobban közelít a két dimenziós határt jellemző 0.600-hoz. Innentől viszont a növekmény csökkenni kezd, vagyis a "törés" már a 6250 m-es cella tartományban elkezdődik.

Ismét fel kell tenni azt a kérdést, vajon ettől kezdve mit mér az eljárás. Elméletileg az országos úthálózatot *egydimenziós, anyag nélküli vonalaknak* feltételezve, az eljárást sokáig ismételve a cellák folytonosan fogynának és a dimenzió értéke a $D = 1$ értékhez kellene, hogy közelítsen. Amennyiben viszont azt feltételeznénk, hogy a "vonalvastagság" *kifejezi az utak tényleges szélességét*, (például egy légifelvétel alapján dolgoznánk) akkor természetesen nem ez a helyzet: ebben az esetben az egyre kisebb cellákkal az országos úthálózattal ténylegesen borított *kétdimenziós területet* képeznénk le egyre pontosabban, miközben a dimenzió értéke újra a D = 2-höz közelítene. Térkép használata esetén egy harmadik helyzet alakulna ki: itt ugyanis nem a valóságos utak szélességét érzékeljük, hanem egy jelkulcsot: vastagabb vonalak jelzik a főúthálózatot, vékonyabbak a mellékutakat. Ha az eljárást nagyon soká folytatnánk, elméletileg a jelkulcs szerinti vonalakkal kifeketített tartomány *területét* fedhetnénk le. Számítógépes eljárás esetén is erről lenne szó, de itt a képet még tovább tarkítja, hogy a képfelbontás mértékének megfelelő képpontok véges száma miatt az eljárás egy ponton túl nem is folytatható. Ez azonban nem változtat azon, hogy mindezen esetekben egy-egy *kétdimenziós véges terület* az, amit az eljárásban lefedünk, a dimenzió értéke tehát a D = 2-höz kell közelítsen.

Mégis fraktál?

Más a helyzet, ha az úthálózatból nem ragadjuk ki az *országos úthálózatot*, ezt a véges hosszúságú és területű részhalmazt, hanem az utakat ennél szélesebben értelmezzük. Ebben az esetben a mellékutakhoz önkormányzati utak, mező- és erdőgazdasági utak, magánutak kapcsolódnak, azokhoz kerti utak, turistaösvények, gyalogjárók; és akár épületeken, lakáson, szobán belül is tovább értelmezhetjük a közlekedési funkciójú "utakat". *Ebben az értelemben, ha tehát azoknak a pályáknak az összességét vesszük számításba, amelyeket például egy ember (csecsemő, felnőtt, kerékpáros, turista, motoros, kamionos stb) bejárhat, valószínűleg igaz az a feltételezés, hogy a teljes kétdimenziós földfelületnek egy-egy fraktál-szerű tartományáról van szó.*

E sorok írója is fontos és kutatandó problémának tartja az ember számára rendelkezésre álló mozgási tér szerkezetének a vizsgálatát, e tér különböző hálózati szintjeinek szerkezetét és e szintek egymáshoz való kapcsolódását. Például ilyen lehet egy város gyalogos tartományainak, rokkant- vagy babakocsival bejárható tartományainak, autóval bejárható tartományainak vizsgálata, ezek átfedéseinek értékelése. Könnyen elképzelhető, hogy a dobozolási módszer fontos áttekintésekre és új ismeretekre vezethet ezen a területen – egyébként akár függetlenül attól, hogy fraktálszerkezetként, vagy kétdimenziós térként értelmezzük-e a vizsgálat tárgyát.

Egy másik lehetséges kutatási terület az egyes úthálózati szintek saját funkcionális terének illetve azok egymáshoz való kapcsolódásának vizsgálata: például a mellékúthálózat külön értékelése, a főhálózat külön értékelése, a gyorsforgalmi hálózat külön értékelése. *Koren Csaba* a fraktálközelítésből kiindulva ezeknek a struktúráknak az önhasonló voltát feltételezi, legalább is hipotetikusan. E hozzászólás szerzője az egyes szintek funkciójából, topológiájából, építési körülményeiből és időszakából következtetve ettől eltérő hipotézist állított fel (*Fleischer* 1994). Eszerint éppen, hogy lényeges *strukturális eltérések* lennének a különböző szintek között, és ezeket az eltéréseket a jövőbeli fejlesztéseknél is tanácsos figyelembevenni. Feltehető, hogy önmagában a dobozszámlálási módszer nem elegendő a különböző hálózati szintek strukturális hasonlóságainak és eltéréseinek a kimutatására, de mint egyik módszer, fontos segédeszköz lehet a különböző szintek/funkciók váltásának tanulmányozásában.

Egy harmadik lehetséges kutatási irány lehet az, ha időben tudjuk kiterjeszteni, dinamizálni a vizsgált "idom" határait. Például ha 1850-től 1920-ig tíz évenként ábrázoljuk a mindenkori hazai vasúthálózatot, vagy 1950-től napjainkig rendre az összes burkolt utat, akkor mindkét esetben változó, növekvő hálózatokat kapunk, és elképzelhető, hogy éppen e változás tanulmányozására jól felhasználható a fraktálgeometria mérési apparátusa. *Nemes Nagy József* pontosan erre a lehetőségre hívja fel a figyelmet saját hivatkozásai alapján: "...nemcsak a természet alakzatai, hanem olyan összetett társadalmi folyamatok, mint a városnövekedés, vagy a különböző hálózatok növekedési folyamata is jól leírható a fraktálmodellek segítségével." (*Nemes Nagy*, 1998 p.205)

Következtetések, megjegyzések

A vonatkozó fraktál-irodalom alapján mind a mesterséges, képlettel előállított alakzatok esetében, mind pedig a természetes formációk során olyan eljárások bizonyultak fraktálok létrehozójának, amelyek esetében viszonylag egyszerű formulák ismétlődően hasonló jelenségeket alakítanak ki. A víz – a gravitáció és a topológia hatására – hasonló módon folyik össze kis erecskékké, patakokká majd folyókká. Fraktál-geometriai szempontból a gyökerek vagy a faágak ismétlődő elágazásai is jól közelítik az önhasonló alakzatokat.

Az úthálózatok ettől némiképp eltérő, csak részben fa, részben viszont hálós szerkezeteket alkotnak. Önmagában ez a makroszerkezeti eltérés természetesen nem zárja ki a tág értelemben vett utak, közlekedési csatornák fraktálszerkezetét. Az erre vonatkozó vizsgálat az idézett tanulmányban az úthálózati szinteknek egy-egy viszonylag szűkebb, véges tartományára terjedt ki (országos úthálózat, Győr úthálózata). Az adott tartományban a választott eljárás előbb a kétdimenziós burkolóidom területét méri, és csak később válik érzékennyé magára a hálózatra. Ennek megfelelően a dimenziószám is előbb kettőhöz közelít, majd egyhez. Az eljárás során ennek a mozgásnak rövid szakaszait közelítette regressziós egyenessel a tanulmány szerzője; ez azonban nem tekinthető alkalmasnak a fraktál jelleg bizonyítására, különösen nem annak számszerű elemzésére, a kapott számértékekből való következtetések levonására.

A fraktál tulajdonságnak az a lényege, hogy a dobozoló eljárás közben újabb és újabb, az eljárás számára a korábbi lépésekben nem érzékelt finomságú rajzolatok bukkannak fel, ami megakadályozza, hogy a lefedés közelítsen egy kétdimenziós síkidom teljes kitöltéséhez. Kétségtelen, hogy a felület áttörtsége, amit az úthálózat képvisel, *egy* ilyen "változást" okozott a dobozolás során, ez azonban még nem az úthálózat speciális és saját tulajdonsága, hanem a hálózatosság tényének következménye. Az országos úthálózat, mint véges tartomány maga semmiképpen nem ígér további meglepetést, ebben a körben tehát a fraktál-természet az eljárással a továbbiakban nem igazolható. Más a helyzet, ha további, finomabb úthálózatokat is bevonunk a vizsgálatba, illetve, ha időbeli dinamikát tudunk adni a vizsgálatnak;. erre vonatkozólag azonban egyelőre csak logikai feltevéseket tudunk megfogalmazni, az eddigi eljárás semmiféle tapasztalati tanulsággal nem szolgál.

Jóllehet hozzászólásunkban kétségeinket fogalmaztuk meg abban a tekintetben, hogy az ismertetett eljárás igazolta volna az úthálózat fraktál természetét, a tanulmány közelítési szempontjait ugyanakkor ígéretesnek tartjuk a széles értelemben vett úthálózat, illetve másik oldalról az emberi mozgási tér különböző rétegeinek, szintjeinek, lehetőségeinek az elemzésében. Megjegyzéseinknek nem az a célja, hogy fékezzük az ezirányú további kisérletezést. Ellenkezőleg, kifejezetten fel kívánjuk hívni a figyelmet arra, hogy elképzelhető, hogy a hálózati tulajdonságok és a területi kiszolgálás, területi ellátás közötti kapcsolat kutatásában nagyon is fontos és használható eszközt sikerült *Koren Csabának* importálnia a fraktál irodalomból.

Hivatkozások

Dr. Koren Csaba: Úthálózatok és fraktálok. Közlekedéstudományi Szemle 51. évf. 5. szám p.178, (9) 2001

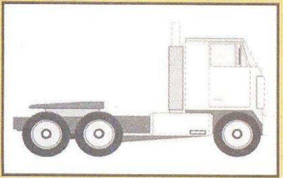
Fleischer Tamás: A gyorsforgalmi hálózat kialakításának néhány kérdéséről. Közlekedéstudományi Szemle 44. évf. 1. szám p.7 (17) 1994

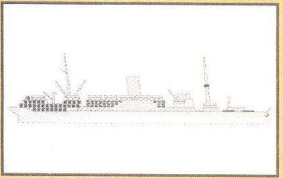
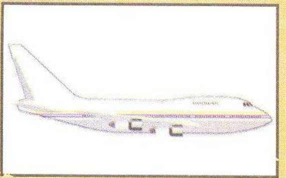
Nemes Nagy József: A tér a társadalomkutatásban. Bevezetés a regionális tudományba. Hilscher Rezső Szociálpolitikai Egyesület, Budapest (262 p) 1998

Közlekedéstudományi szemle

10.
2001
október
LI.
évfolyam





A KÖZLEKEDÉSTUDOMÁNYI EGYESÜLET SZAKLAPJA